Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Физико-математический факультет

Кафедра прикладной математики и информатики

Квалификационная работа

«Допущено к защите»

зав. каф. пр. математики и информатики,

доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А. В. Коровай

ПРИЛОЖЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ К РЕШЕНИЮ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Выполнил:

студент 403 гр. д/о

физ.-мат. факультета

Шлехт Игорь

Руководитель:

доцент кафедры ПМ и И

Леонова Наталья Григорьевна

Тирасполь, 2017

Оглавление

[Аннотация 3](#_Toc477437372)

[Введение 4](#_Toc477437373)

[1. Понятие транспортной задачи и ее решение 6](#_Toc477437374)

[1.1. Постановка задачи 6](#_Toc477437375)

[1.2. Условие разрешимости транспортной задачи 10](#_Toc477437376)

[1.3. Особенности ограничений транспортной задачи 11](#_Toc477437377)

[1.4. Нахождение опорного плана методом Северо-западного угла 12](#_Toc477437378)

[1.5. Условие оптимальности плана перевозок 18](#_Toc477437379)

[1.6. Транспортаная задача с нарушенным балансом потребителей и поставщиков 34](#_Toc477437380)

[1.7. Метод Минимального эелемента 39](#_Toc477437381)

[2. Приложение Транспортной задачи 43](#_Toc477437382)

[2.1. Задачи оптимальной транспортировки продукции 43](#_Toc477437383)

[2.1.1. Задача о транспортировки сельскохозяйственной продукции 43](#_Toc477437384)

[2.1.2. Задача о транспортировки промышленных товаров 47](#_Toc477437385)

[2.2. Задача оптимального производства товаров 53](#_Toc477437386)

[2.2.1. Задача о производстве продукции аграрных предприятий 53](#_Toc477437387)

[2.2.2. Задача о производстве промышленной продукции 58](#_Toc477437388)

[2.3. Задача оптимального назначения 62](#_Toc477437389)

[3. Разработка Программы для решения Транспортной задачи 66](#_Toc477437390)

[3.1. Структура программы 66](#_Toc477437391)

[Заключение 67](#_Toc477437392)

[Литература 68](#_Toc477437393)

[Приложение 1. Исходные тексты программы 69](#_Toc477437394)

[Приложение 2. Руководство пользователя 70](#_Toc477437395)

Аннотация

В данной квалификационной работе рассматривается одна из наиболее распространенных задач, встречающихся в математическом программировании –транспортная задача. Проведено исследование особенностей транспортных задач.

Для решения применяется метод потенциалов, дано подробное изложение этапов метода с иллюстрацией их на конкретных примерах. Приводятся доказательства двух теорем: об условии разрешимости транспортной задачи и об условиях оптимальности плана перевозок. Для нахождения исходного опорного плана применяются методы северо-западного угла и минимального элемента (минимальной стоимости).

Рассмотрено решение конкретных экономических задач: задачи о транспортировке производственных и продуктовых товаров потребителям, задача перегона вагонов к пунктам погрузки, транспортировка материалов на строительные объекты.

Решение транспортных задач не может быть выполнена вручную, в приемлемые сроки, при количестве поставщиков и потребителей более пяти. В связи с этим возникаем вопрос о создании и разработке программного продукта для оптимизации решения транспортных задач.

На основе теории и разработанного алгоритма написана прикладная программа на языке С#, позволяющая рационально решать транспортные задачи.

Введение

Транспортная задача (Т.З.) является одной из распространенных задач линейного программирования специального вида. Эта задача такого наиболее рационального прикрепления пунктов отправления грузов (поставщиков) к пунктам их назначения (потребителям), чтобы общая стоимость транспортировки грузов была минимальной. Первая строгая постановка задачи была дана Хичкоком, а точный универсальный метод ее решения разработан советскими учеными Л.В. Конторовичем и М.К. Гавуриным.

Транспортная задача получила в настоящее время широкое применение в теоретических разработках и практическом применении в промышленности, торговле, сельском хозяйстве, транспорте и т.д.

Поскольку транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то для ее решения можно применять симплексный метод, однако в связи со спецификой транспортной задачи для ее решения на основе симплексного метода были разработаны специальные методы, один из наиболее известных – метод потенциалов, который состоит в последовательном улучшении плана (перевозок).

В исследовании рассмотрен метод потенциалов для решения транспортной задачи, так как он легче поддается программированию.

Актуальность выбранной темы обусловлена тем, что транспортная задача имеет важное значение при решении вопросов о более рациональном использовании продукции, а также оптимального планирования груза потока и работы различных видов транспорта.

Предмет исследования: основные принципы и методы оптимизации транспортных перевозок. Объект исследования: оптимальные планы перевозок.

Цельюработы является приобретение навыка оптимизации транспортных перевозок и разработка программного обеспечения для решения транспортных задач.

Для достижения поставленной цели следует решить следующие *задачи*:

- показать сущность и назначение транспортной задачи,

- составить математические модели транспортных задач (открытого, закрытого типа)

- построить исходный опорный план (методом северо-западного угла и минимального элемента)

- исследовать опорный план на оптимальность и его улучшение (метод потенциалов)

- оптимизация решение транспортной задачи, путем создания электронного продукта

Первая глава квалификационной работы раскрывает теоретические аспекты транспортной задачи. В ней рассматривается постановка транспортной задачи, построение математической модели и раскрывается сущность методов нахождения исходного опорного плана и оптимального.

Во второй главе показаны приложения транспортных задача к решению некоторых экономических задач. В частности, задачи оптимальной транспортировки продукции, оптимального назначения, развития и размещения производства.

Третья глава посвящена разработке алгоритма и созданию программного обеспечения, которое позволяет быстро и точно реализовать решение намеченных целей. Программа написана на языке программирования С#.

Приложение 1 содержит код разработанной программы.

# Понятие транспортной задачи и ее решение

## Постановка задачи и ее математическая модель

Пусть в пунктах *A*1, *A*2, ..., *Am* производят некоторый однородный продукт в количествах *a*1, *a*2, …, *am* соответственно. Этот продукт следует перевезти в пункты *B*1, *B*2, ..., *Bn*, потребляющие его соответственно в количествах *b*1, *b*2, ..., *bn.*.

Пункты *Ai* () называются пунктами отправления или поставщиками, а пункты *Bj* () – пунктами назначения или потребителями. Рассмотрим сначала случай, когда суммарный объем производства равен суммарному объему потребления, т.е.

.

Предположим, что из каждого пункта производства возможна транспортировка продукта в любой пункт потребления. Транспортные издержки по перевозке из пункта *Ai* в пункт *Bj* единицы продукции равны *cij* (,). Значения *cij* будем называть тарифами. Пусть *xij* – количество продукта, перевозимого из пункта *Ai* в пункт *Bj*. Переменные *xij* будем называть перевозками.

Задача состоит в определении такого плана перевозок, при котором весь продукт из пунктов производства вывозится, запросы всех потребителей полностью удовлетворяются и суммарные транспортные издержки минимальны.

Условия T.З. удобно записывать в таблице следующего вида:

*Таблица 1.1*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители | | *B*1 | *B*2 | … | *Bj* | … | *Bn* |
| Поставщики | *bj*  *ai* | *b*1 | *b*2 | … | *bj* | … | *bn* |
| *A*1 | *a*1 | *c*11  *x*11 | *c*12  *x*12 | … | *c*1*j*  *x*1*j* | … | *c*1*n*  *x*1*n* |
| *A*2 | *a*2 | *c*21  *x*21 | *c*22  *x*22 | … | *c*2*j*  *x*2*j* | … | *c*2*n*  *x*2*n* |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| *Ai* | *ai* | *ci*1  *xi*1 | *ci*2  *xi*2 | … | *cij*  *xij* | … | *cin*  *xin* |
| … | … | … | … | … | … | … |  |
| *Am* | *am* | *cm*1  *xm*1 | *cm*2  *xm*2 | … | *cmj*  *xmj* | … | *cmn*  *xmn* |

В таблице 1.1 каждая клетка (*i*, *j*), соответствующая паре *i*-й поставщик – *j*-й потребитель, условно делится диагональю пополам и в правом верхнем углу записывается значение тарифа *cij*, а в левом нижнем – значение перевозки *xij*.

*Математическая модель* задачи имеет вид:

*xij* ≥ 0, ; 



*Z* = *c*11*x*11 + *c*12*x*12 + … + *c*1*nx*1*n* + *c*21*x*21 + *c*22*x*22 + … + *c*2*nx*2*n* + … +

+ *cm*1*xm*1 + *cm*2*xm*2 + … + *cmnxmn* → min.

С помощью индексов суммирования эта модель запишется так:

*xij* ≥ 0, ;  (1.1)

 (1.2)

 → min. (1.3)

Условия (1.1) – условия не отрицательности перевозок (обратная транспортировка груза от потребителя к поставщикам запрещена).

Условия (1.2а) характеризируют полный вывоз продукта от поставщиков, а условия (1.2б) – полное удовлетворение запросов потребителей.

Суммарная стоимость *Z* транспортировки продукта согласно условию (1.3) должна быть минимальной.

Совокупность переменных *xij*, удовлетворяющих условиям (1.1) и (1.2), будем называть планом перевозок T.З. и записывать его в виде матрицы:

.

Совокупность тарифов *сij* будем записывать в виде матрицы, которую назовем матрицей тарифов:

.

Запишем систему ограничений T.З. в векторной форме. Обозначим столбец коэффициентов при *xij* через , а столбец сводных членов – через , тогда:

Система ограничений (1.2) T.З. в векторной форме будет иметь вид:



## Условие разрешимости транспортной задачи и особенности ограничения

*Теорема.* Чтобы транспортная задача была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

 (1.4)

*Доказательство:*

*Необходимость.* Пусть транспортная задача разрешима, т.е. система ограничений (1.1) – (1.2) задачи совместна, тогда существуют значения *xij* (; ), удовлетворяющие этим условиям. Необходимо доказать, что

.

Просуммировав условия (1.2а) по *i*, а условия (1.2б) – по *j*, получим:

и .

Т.к. левые стороны этих выражений равны, то равны и правые, т.е. , что и требовалось доказать.

*Достаточность.*Пусть. Необходимо доказать, что существуют значения *xij*  (; ), удовлетворяющие условиям (1.1) – (1.2). Положим

, ; 

и покажем, что  является планом T.З.

Действительно,

;



Очевидно также, что

 > 0.

Таким образом, условия (1.1) – (1.2) удовлетворяются. Достаточность условий (1.4) доказана.

Рассмотрим некоторые *особенности ограничения* транспортной задачи.

T.З. является задачей линейного программирования, и ее можно решить симплексным методом. Однако специфика ограничений T.З. позволяет применять для ее решения методы значительно менее громоздкие, чем симплексный метод. Один из них – метод потенциалов.

Особенности ограничений T.З. следующие:

а) ограничения заданы в виде уравнений;

б) каждая переменная *xij* встречается только в двух уравнениях;

в) коэффициенты при неизвестных, входящих в уравнение, равны единице (или нулю, если переменные не входят в уравнение).

Рассмотрим систему уравнений (1.2). Она содержит (*m + n*) уравнений с *m* · *n* неизвестными. Сложив почленно уравнения отдельно системы (1.2а) и отдельно – системы (1.2б), мы получим два одинаковых уравнения:

> 0;

> 0.

Это говорит о том, что система уравнений (1.2) Т.З. линейно зависима и, по крайней мере, одно из уравнений лишнее. Следовательно, максимальное число линейно независимых уравнений системы (1.2), т.е. ранг *r* системы, не более, чем (*m + n* – 1).

Можно показать, что ранг *r* в точности равен (*m + n* – 1), т.е. система ограничений T.З. содержит ровно (*m* *+ n* – 1) линейно независимых уравнений. Это означает, что если систему уравнений (1.2) решить методом Жордана-Гаусса, то число базисных переменных будет равно (*m + n* – 1).

Одним из методов решения T.З., который учитывает специфику ее ограничений, является метод потенциалов. По существу, его можно рассматривать, как результат реализации симплексного метода в условиях транспортной задачи (1.1)–(1.3).

Метод потенциалов состоит из трех шагов.

Первый шаг – отыскание исходного опорного плана перевозок T.З..

Второй шаг – проверка найденного плана на оптимальность. Если условия оптимальности плана перевозок выполнены – задача решена.

Третий шаг – если найденный план не является оптимальным, находим новый опорный план, который ближе к оптимальному, чем предыдущий, и снова переходим к выполнению второго шага.

Таким образом, в методе потенциалов первый шаг выполняется один раз, а второй и третий шаги могут выполняться неоднократно, если исходный план окажется неоптимальным.

## Решение транспортной задачи методом потенциалов.

### Методы отыскания исходного опорного плана перевозок (первый шаг метода).

Ранг системы ограничений T.З. равен (*m + n* – 1), следовательно, невырожденный опорный план Т-задачи содержит (*m + n* – 1) положительных компонент или перевозок (соответствующих базисным переменным). Остальные компоненты этого плана (соответствующие свободным переменным) равны нулю. Допустим, что исходный невырожденный опорный план T.З. найден.

Запишем условия задачи и этот план в таблице 1.1, при этом значения перевозок, равные нулю, писать не будем. Клетки таблицы, соответствующие отличным от нуля перевозкам, будем называть занятыми или базисными, а остальные клетки – свободными или незанятыми. Число базисных (занятых) клеток равно (*m + n* – 1). Исходный опорный план T.З. можно находить с помощью различных методов. Рассмотрим два из них, методы «северо-западного угла» и «минимального элемента».

Каждая клетка (*i*, *j*) таблицы 1.1 соответствует паре *i*-й поставщик – *j-*й потребитель для *i* = ; *j* = .

Метод ***«северо-западного угла»*** состоит в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче возможности поставщика или потребности потребителя. Алгоритм данного метода продемонстрируем на следующем примере.

*Пример.*  
Заданы возможности поставщиков *Ai* и потребности потребителей *Bj*. Требуется найти допустимые объемы перевозки от каждого поставщика к каждому потребителю *Xij*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 | B 4 |
| A 1 | 6 | 8 | 1 | 2 | 30 |
| A 2 | 4 | 5 | 9 | 8 | 40 |
| A 3 | 9 | 2 | 3 | 6 | 20 |
| Потребность | 20 | 30 | 30 | 10 |  |

Шаг 1.Первая ячейка — «северо-западная» ячейка (1-й поставщик, 1-й потребитель). Записываем в эту ячейку максимальный объем, который имеется у поставщика и необходим потребителю (находим минимум между 20 и 30 кг, в данном случае это 20 кг). Так как спрос на 1-го потребителя полностью удовлетворен, ячейки данного столбца уже не будут заполняться, в данном столбце ставятся прочерки

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | |
| B 1 (20-20) | B 2 (30) | B 3 (30) | B 4 (10) |
| A 1 (30-20) | 20 |  |  |  |
| A 2 (40) | - |  |  |  |
| A 3 (20) | - |  |  |  |

Шаг 2.Переходим в следующую ячейку X*12* (1-й поставщик, 2-й потребитель). Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (берем минимум между 30 и 10 кг, получаем 10 кг). Соответственно, уменьшаем оставшиеся не распределенными объемы поставки и потребления в строке и столбце на 10 кг. Запасы 1-го поставщика исчерпаны, ставим прочерки в данной строке

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | |
| B 1 (20-20) | B 2 (30-10) | B 3 (30) | B 4 (10) |
| A 1 (30-20) | 20 | 10 | - | - |
| A 2 (40) | - |  |  |  |
| A 3 (20) | - |  |  |  |

Шаг 3.Следующей ячейкой будет *X22* (2-й поставщик, 2-й потребитель). Проделываем все те же операции, что и в первых двух шагах, то есть записываем в ячейку максимальный объем, который позволяет поставщик и спрос потребителя (берем минимум между 40 и 20 кг, получаем наши 20 кг). Соответственно, далее уменьшаем оставшиеся не распределенными объемы поставки и потребления в строке и столбце на 20 единиц. Потребности 2-го потребителя теперь полностью удовлетворены, ставим прочерки во втором столбце.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | |
| B 1 (20-20) | B 2 (30-10) | B 3 (30) | B 4 (10) |
| A 1 (30-20) | 20 | 10 | - | - |
| A 2 (40-20) | - | 20 |  |  |
| A 3 (20) | - | - |  |  |

Шаг 4.Следующая «северо-западная» ячейка *X23* (2-й поставщик, 3-й потребитель). Вписываем в эту ячейку максимальный объем, который позволяет запас поставщика и спрос потребителя (берем минимум между 30 и 20 кг, то есть 20 кг). И опять, как и ранее, уменьшаем оставшиеся не распределенными объемы поставки и потребления в строке и столбце на 20 кг. Запасы 2-го поставщика (в 2-й сверху строке) теперь исчерпаны, ставим прочерки в эту строку.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | |
| B 1 (20-20) | B 2 (30-10) | B 3 (30-20) | B 4 (10) |
| A 1 (30-20) | 20 | 10 | - | - |
| A 2 (40-20) | - | 20 | 20 | - |
| A 3 (20) | - | - |  |  |

Шаг 5.

Оставшиеся объемы у последнего поставщика распределяем последним потребителям.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | |
| B 1 (20-20) | B 2 (30-10-20) | B 3 (30-20-10) | B 4 (10-10) |
| A 1 (30-20-10) | 20 | 10 | - | - |
| A 2 (40-20-20) | - | 20 | 20 | - |
| A 3 (10-10) | - | - | 10 | 40 |

Таким образом, мы имеем, что весь наш груз от поставщиков распределён по потребителям. Если наблюдается недостаток или избыток груза, то это означает, что была допущена арифметическая ошибка, или задача не была приведена к закрытому виду. Для того, чтобы убедиться в правильности полученного нами решения, нужно сверить исходные объемы каждого поставщика, которые заданы в условиях транспортной задачи, с суммами отгрузок в соответствующей строке, а объемы каждого потребителя, которые также заданы в условиях — с суммами отгрузок по соответствующим столбцам

При построении исходного опорного плана методом «северо–западного угла» не учитываются значения тарифов Сij, которые влияют на значение целевой функции. Естественно предположить, что чем больше будет в опорном решении базисных клеток с наименьшими тарифами, тем ближе будет это решение к опорному решению.

Рассмотрим другой метод нахождения исходного опорного плана, метод ***«минимального элемента»*** (минимальной стоимости), в котором учитываются значения тарифов *Ci*j.

Нахождение исходного опорного плана, т.е определение перевозок *xij*, в таблице начинается с клетки, в которой записан наименьший тариф.

Значение *xi*j определяется так же, как в методе «северо–западного угла». Если клеткой с наименьшим тарифом является клетка (*k,r*), то

*xkr* = min(*ak*,*br*).

Затем из рассмотрения, как и в методе «северо–западного угла», исключаем либо строку, либо столбец и среди оставшихся клеток находим клетку с наименьшим тарифом, которую заполняем аналогично.

В результате таких действий будет получен исходный опорный план Т.З. который затем необходимо проверить на оптимальность.

Рассмотрим метод «минимального элемента» на примере.

Пример

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | Запас |
| B 1 | B 2 | B 3 |
| A 1 | 4 | 3 | 5 | 500 |
| A 2 | 13 | 6 | 2 | 400 |
| A 3 | 5 | 3 | 1 | 200 |
| Потребность | 300 | 250 | 550 |  |

Проверяем условие разрешимости Т.З.:





Условие выполнено, Т.З. закрытого типа.

Заполнение клеток начинаем с клетки (3,3) с наименьшим тарифом *C*33 = 1: *x*33 = min(200,550) = 200

= 550 – 200 = 350.

Временно исключаем из рассмотрения 3-ю строку. Наименьшим среди оставшихся является тариф *C*23 = 2. Находим :

*x*23 = min(400,350) = 350;

= 400 – 350 = 50;

исключаем временно из рассмотрения 3-й столбец.

Далее заполнение клеток проводим в следующем порядке:

*x*12 = min(500,250) = 250;

 = 500 – 250 = 250;

исключаем 2-й столбец.

*x*11 = min(250,300) = 250;

 = 300 – 250 = 50;

исключаем 1-ю строку.

*x*21 = min(50,50) = 50.

В таблице 1.2 записан найденный опорный план *X*1.

*Таблица 1.2*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | *bj*  *ai* | 300 | 250 | 550 |
|  | 500 | 4  250 | 3  250 | 5  ― |
|  | 400 | 13  50 | 6  ― | 2  350 |
|  | 200 | 5  ― | 3  ― | 1  200 |

Найденный опорный план:

*X*1 = 

Базисных клеток: m + *n* – 1 = 5.

Полученный опорный план необходимо проверять на оптимальность, т.е. выполнять второй и при необходимости третий шаги метода потенциалов.

Можно использовать другую модификацию метода минимального элемента, например, можно выбирать минимальный тариф *Cij* 1-й строки (или 1-го столбца) рассматриваемой на каждом шаге части таблицы.

Найдем исходный опорный план. В 1-й строке таблицы наименьший тариф *C*12 = 3. Найдем значение *x*12:

*x*12 = min(500,250) = 250;

 = 500 – 250 = 250;

исключаем 2-й столбец.

В оставшейся части таблицы в 1-й строке наименьший тариф *C*11 = 4; находим *x*11:

*x*11 = min(250,300) = 250;

 = 300 – 250 = 50;

исключаем 1-ю строку.

В оставшейся части таблицы в 1-й строке наименьший тариф *C*23 = 2, находим значение *x*23:

*x*23 = min(400,550) = 400;

 = 550 – 400 = 150.

Далее заполнение клеток проводим аналогично:

*x*33 = min(200,150) = 150;

 = 200 – 150 = 50;

*x*31 = min(50,50) = 50.

Найденный опорный план записан в таблицу. 1.3.

*Таблица 1.3*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | *bj*  *ai* | 300 | 250 | 550 |
|  | 500 | 4  250 | 3  250 | 5  ― |
|  | 400 | 13  ― | 6  ― | 2  400 |
|  | 200 | 5  50 | 3  ― | 1  150 |

Исходный опорный план  найденный другим способом имеет вид:

= .

Базисных клеток 5.

Исследование планов на оптимальность будет проведено в следующем пункте.

### Исследование опорного плана на оптимальность (второй этап метода).

Признак оптимальности плана перевозок T.З. устанавливает теорема.

*Теорема.*Для того, чтобы некоторый допустимый план *X* = (*xij*)*m∙n* T.З. был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из (*m + n*) чисел *U*1, *U*2, …, *Um* ; *V*1, *V*2, …*Vn*,  удовлетворяющих условиям:



Числа *Ui* и *Vj* называются соответственно потенциалами пунктов отправления и пунктов назначения или потенциалами поставщиков и потребителей. А условия (1.5), (1.6) условиями оптимальности или потенциальности плана перевозок T.З..

*Доказательство.*

T.З., т.е. задачу нахождения минимума функции *Z*:

*xij* ≥ 0, ;  (1.1)

 (1.2)

 → min. (1.3)

можно рассматривать как двойственную задачу к некоторой исходной прямой задаче линейного программирования (з.л.п.), условия которой легко получить по правилам построения двойственных задач. [ ]

Каждому ограничению-равенству вида  соответствует в прямой задаче свободная переменная *Ui* ¸а каждому ограничению-равенству вида соответствует в прямой задаче свободная переменная *Vj* .

Каждой несвободной переменной *xij* ≥ 0, ;  соответствует в прямой задаче ограничение-неравенство

*Ui* + *Vj* ≤ *cij* , ;  (1.7)

Максимизируемой функцией прямой задачи является функция

 (1.8)

Задача (1.7), (1.8) в свою очередь является двойственной к T.З.. Теперь используя 1-ю и 2-ю теоремы двойственности докажем сформулированную теорему.

*Необходимость.* Пусть *X* = *(xij*) – оптимальный план T.З.. Поскольку оптимальный план является всегда допустимым, следовательно, он удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2) T.З., т.е.

*xij* ≥ 0, ; ;



Согласно 1-й теореме двойственности прямая задача (1.7), (1.8) также имеет оптимальное решение *U*1, *U*2, …, *Um*; *V*1, *V*2, …*Vn*; удовлетворяющее условиям (1.7), т.е. *Ui* + *Vj* ≤ *cij* , ; и следовательно, условия (1.6) выполняются. По 2-й теореме двойственности оптимальные решения обеих задач удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости:

*xij* (*Ui* + *Vj* – *cij*) = 0.( ; )

Отсюда следует, что для *xij* > 0, *Ui* + *Vj* – *cij* = 0 или *Ui* + *Vj* = *cij* т.е. условия (1.5) выполняются.

Вторая группа условий

,



выполняется автоматически, в силу условий (1.2).

*Достаточность.*Пусть для некоторого допустимого плана существует система чисел ; , удовлетворяющая условиям (1.5), (1.6). Выполнение этих условий означает, что эта система чисел является допустимым решением прямой задачи (1.7), (1.8) (условия (1.7) при этом будут выполняться). Выполнение условий (1.6) означает, что допустимое решение *U*1, *U*2, …, *Um*; *V*1, *V*2, …*Vn* прямой задачи и допустимый план  двойственной задачи (T.З.) удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости:

*xij* (*Ui* + *Vj* – *cij*) = 0

По 2-й теореме двойственности допустимый план является оптимальным.

Рассмотрим связь условий оптимальности (1.5) и (1.6) плана перевозок транспортной задачи с критерием оптимальности решения в симплексном методе.

Решим T.З. симплексным методом, одновременно найдем и оптимальное решение *U*1, *U*2, …, *Um*; *V*1, *V*2, …*Vn* задачи (1.7), (1.8). Вычислим оценки ∆*ij* векторов :

∆*ij* =*Ui* + *Vj* – *cij*, ; .

Транспортная задача является задачей на минимум и поэтому в симплекс-методе, критерий оптимальности решения для з.л.п. на минимум формируется так: если для данного опорного решения все оценки неположительны, то это опорное решение оптимально. Поэтому и для T.З. решение оптимально, если все оценки ∆*ij* ≤ 0. При этом для всех базисных векторов :

∆*ij* =*Ui* + *Vj* – *cij*,

следовательно, для всех базисных переменных

*xij*: *Ui* + *Vj* = *cij*

т.е. получим условие (1.5).

Для небазисных векторов : ∆*ij* =*Ui* + *Vj* – *cij* ≤ 0, т.е. для небазисных переменных *xij*:

*Ui* + *Vj* ≤ *cij*

т.е. получили условие (1.6).

Из теоремы следует, что для того чтобы план T.З., записанный в таблице был оптимален, необходимо выполнение следующих условий:

– для каждой базисной клетки (*i*, *j*) сумма потенциалов должна быть равна соответствующему тарифу *Cij*: *Ui + Vj = cij*;

Если опорный план является вырожденным и какая-то из базисных переменных равна нулю, то для клетки, соответствующей этой переменной тоже должно выполняться условие *Ui + Vj = cij*;

– для каждой свободной клетки (*i*, *j*) сумма потенциалов должна быть меньше либо равна *Cij*: *Ui + Vj ≤ cij* или

Δ*ij = Ui + Vj – cij* ≤ 0.

Значения Δ*ij* являются оценками соответствующих свободных переменных *xij*; будем называть их оценками свободных клеток (*i,j*).

Для базисных клеток оценки Δ*ij = Ui + Vj – cij* = 0.

*Вывод.*Поскольку T.З. является задачей линейного программирования (з.л.п.) на минимум, то критерий оптимальности решения здесь формулируется так: если для данного опорного решения все оценки неположительны, то это решение оптимально. Если хотя бы одна из свободных клеток имеет положительную оценку, то опорный план оптимальным не является, и его можно улучшить, вводя в базис свободную переменную, соответствующую этой клетке.

Поставим в соответствие поставщикам потенциалы *Ui*, , а потребителям – *Vj*,  . В оптимальном плане для всех базисных клеток должны выполняться условия: *Ui*+ *Vj* = *cij* .

Очевидно, таких уравнений можно составить столько, сколько в таблице базисных переменных (клеток), т.е.: *m + n* – 1. Полученная система уравнений будет содержать: *m + n* неизвестных: *Ui, i* ***= ;*** *V****j, ***. Решая эту систему уравнений, одну из переменных (любую) будем считать свободной. Условимся для определенности всегда считать свободной переменную *U*1. Положив *U*1 = 0, из этой системы уравнений определяем значения остальных неизвестных *Ui* и *Vj*.

Затем проверяем выполнение условий (1.6). Если найденный опорный план является оптимальным, то для всех свободных клеток должны выполняться условия Δ*ij = Ui + Vj – cij* ≤ 0, т.е. оценки свободных клеток неположительны.

Если условия выполняются, то найденный план оптимальный, если нет, – переходим к 3-му шагу метода потенциалов.

### Определение нового, улучшенного опорного решения (третий шаг метода).

Специфика транспортной задачи позволяет находить новое опорное решение задачи и новый базис по правилу более простому, чем в симплекс-методе. Пусть найденное опорное решение является невырожденным и пусть для клетки (*i*0, *j*0) условие оптимальности нарушено и  - одна из положительных оценок (например, наибольшая). Согласно теореме об улучшении опорного решения, мы получим лучшее опорное решение, если вектор  введем в базис (в вырожденном случае может появиться прежнее решение). Тогда клетка (*i*0, *j*0) станет базисной. Обозначим объем перевозок по маршруту (*i*0, *j*0) в новом решении через *Q* > 0. В клетку (*i*0, *j*0) запишем значение перевозки . Теперь суммарный объем перевозок из *i*0-го пункта стал равен , что невозможно по условиям задачи т.к. нарушен баланс в строке *i*0 и в столбце *j*0. Чтобы восстановить баланс в строке *i*0 перевозку *Q* надо компенсировать, т.е. надо уменьшить на *Q* суммарный объем старых базисных перевозок в этой строке. Условимся восстанавливать баланс только за счет уменьшения одной базисной перевозки в строке *i*0. Пусть, например, мы уменьшаем на *Q* базисную перевозку, записанную в клетке (*i*0, *j*1), в эту клетку запишем «– *Q* ». Но теперь потребитель *j*1 получает груз на *Q* единиц меньше, чем ему требуется, т.е. нарушается баланс по столбцу *j*1. Чтобы его восстановить, надо увеличить на *Q* суммарный объем перевозок в этом столбце. Компенсируем это уменьшение за счет увеличения на *Q* одной только базисной перевозки в столбце *j*1. Пусть, например, мы увеличиваем на *Q* перевозку , в клетку (*i*1, *j*1) запишем «+ *Q* ». Тогда, поскольку, нарушается баланс по строке *i*1, необходимо компенсировать это увеличение за счет уменьшения на *Q* объема одной базисной перевозки в строке *i*1. Продолжаем этот процесс баланса по строкам и столбцам до тех пор, пока не восстановим баланс в столбце *j*0, за счет уменьшения одной базисной перевозки в этом столбце на величину *Q*. Последовательность клеток (*i*0, *j*0), (*i*0, *j*1), (*i*1, *j*1), … должна замкнуться на клетке (*i*0, *j*0). Будем называть эту цепочку клеток циклом пересчета свободной клетки (*i*0, *j*0). Соединяя отрезками прямой последовательные клетки цепочки, мы получим замкнутую ломаную линию, которую также будем называть циклом пересчета. Можно доказать, что если задан некоторый опорный план T.З., то для любой свободной клетки можно построить единственный цикл пересчета. Назовем клетки цепочки, в которые мы записываем «– *Q*» отрицательными, а в которые «+ *Q*» - положительными. Определим *Q*. Будем исходить из того, что значение *Q* надо взять как можно больше (как в симплекс-методе). Рассмотрим отрицательные клетки. Значение перевозок в таких клетках будет равно *xij*баз – *Q* ≥ 0. Отсюда следует, что *Q* надо положить равным наименьшей из перевозок, записанных в отрицательных клетках. Новый опорный план T.З. определяем, увеличивая на *Q* перевозки, записанные в положительных клетках и уменьшая на *Q* перевозки, записанные в отрицательных. Клетка (*i*0, *j*0), для которой составлен цикл пересчета, становиться базисной. Очевидно, что при этом, по крайней мере, одна из старых базисных перевозок обращается в нулевую, соответствующий ей вектор выводится из базиса и соответствующая клетка становиться свободной.

В общем случае может случиться, что нулевые значения перевозок после вычитания *Q* получатся в нескольких отрицательных клетках. Тогда только одна из них (любая) будет считаться свободной, остальные отрицательные клетки цепочки будут базисными и в них запишется значение перевозки равное нулю – это так называемые базисные нули. Полученный план будет вырожденным, но число базисных клеток (переменных) для любого спорного плана всегда будет равно: *m* + *n* – 1.

В случае улучшения вырожденного опорного плана при построении цикла пересчета может оказаться, что в клетку с базисным нулем будет записано «– *Q*». В этом случае значение *Q* = 0 и новый опорный план, который получим после пересчета не меняется, но меняется состав базисных клеток (переменных); отрицательная клетка с базисным нулем станет свободной, а в клетку, для которой составляли цикл перерасчета, запишем базисной ноль. Вероятность зацикливания в T.З. чрезвычайно мала, поэтому правило предупреждения зацикливания не рассматривается. Переход от одного опорного решения к другому, лучшему в методе потенциалов по существу происходит по правилам симплексного метода. Действительно, в базис вводится вектор , по правилам симплекс-метода (для задачи на минимум). Значение новой базисной переменной , где *Q* равно минимальному из значений перевозок (базисных переменных), записанных в отрицательных клетках:

(*xij*баз из отрицательных клеток) =*Q*. (1.9)

При решении общей з.л.п. симплекс-методом [] значение новой базисной переменной *xs* (т.е. значение *Q*) определяется по формуле:

 (1.10)

При решении T.З. симплекс-методом формула (1.10) будет иметь вид:

( *xij*баз/**) =*Q.*

Поскольку в T.З. положительные значения коэффициентов , то легко видно, что последняя формула совпадает с формулой (1.9). Таким образом, формула (1.9) является частным случаем формулы (1.10), т.е. последняя применительно к T.З. превращается в формулу (1.11).

Рассмотрим переход к новому опорному решению (3-й шаг метода) в задаче об удобрениях. В таблице 1.4 записано исходное опорное решение, которое следует улучшить. Среди клеток, для которых нарушаются условия оптимальности (1.6), выбираем клетку (1,4) с наибольшей оценкой Δ14 = 4 >0. Соответствующую переменную *x*14 введем в базис, и клетку (1,4) сделаем базисной. Обозначим новый объем перевозок через *x*14 = *Q*> 0 и в клетку (1,4) таблице (1.4) запишем «+*Q*», т.е. перевозку *x*14 увеличим на «*Q*». Однако теперь от 1-го поставщика вывозится (100+*Q*) т. груза, что невозможно по условию задачи. Нарушился баланс в 1-й строке таблицы, одновременно он нарушился и в 4-ом столбце, так как теперь 4-й потребитель получает (200 + *Q*) т. груза.

*Таблица 1.4*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 300 | 500 | 100 | 200 | *Ui* |
| 100 | 3  100 –Q | 6  – | 5  – | 1  – +Q | *U*1= 0 |
| 400 | 1  200 +Q | 4  200 –Q | 3  – | 2  – | *U*2 = *–*2 |
| 600 | 4  – | 3  +Q 300 | 1  100 | 2  –Q 200 | *U*3 = *–*3 |
| *Vj* | *V*1 = 3 | *V*2 = 6 | *V*3 = 4 | *V*4 = 5 |  |

Восстановим баланс сначала в т 1-й строке за счет одной базисной клетки и в клетку (1,1) запишем «–*Q*». т.е. перевозку *x*11 уменьшаем на *Q*. Теперь нарушен баланс в 1-ом столбце, восстановим его за счет одной базисной клетки (2,1), в которой запишем «+*Q*». Далее восстановим нарушенный баланс во 2-ой строке, записав «–*Q*» в клетку (2,2) и затем во 2-ом столбце, записав «+*Q*» в клетку (3,2). Затем одновременно восстановим нарушенный баланс в 3-й строке и в 4-ом столбце, записав «–*Q*» в клетку (3,4). Теперь баланс полностью восстановлен. В результате этих действий получим цепочку клеток (1,4); (1,1); (2,1); (2,2); (3,2); (3,4), которая называется циклом пересчета свободной клетки (1,4). Клетки этой цепочки называются вершинами цикла. Соединим эти клетки отрезками прямых, как показано в таблице 1.4, полученную замкнутую ломаную линию тоже будем называть циклом пересчета. Клетки (вершины) цикла, в которых записано «–*Q*» будем называть отрицательными, а в которых записано «+*Q»* – положительными.

При решении конкретных задач могут встретится различные формы циклов (рисунок 1.1).

Особенности цикла: а) цикл единственный, замкнутый; б) исходная клетка цикла – свободная её оценка Δ*ij* > 0, остальные – базисные; в) если в строке (столбце) таблицы есть положительная (отрицательная) клетка, то в строке (столбце) должна быть отрицательная (положительная) клетка.

+

+

+

+

+

+

+

+

–

–

–

–

–

–

–

–

+

–

Рис. 1.1

Определим значение *Q*, его надо выбрать так, чтобы перевозки в отрицательных клетках остались неотрицательными и по крайней мере в одной из них перевозка обратилась в нуль. Для этого приравниваем *Q* минимальной из перевозок, записанных в отрицательных клетках таблице 1.4. Отрицательными будут клетки (1,1), (2,2), (3,4), в них записаны перевозки: 100, 200 и 200 соответственно, следовательно,

*Q* = min(100, 200, 200) = 100.

Теперь пересчитаем план перевозок. Перевозки в положительных клетках увеличиваем на 100, в отрицательных – уменьшаем на 100. Клетку (1,1), в которой перевозка обращается в ноль, будем считать свободной, а клетка (1,4) станет базисной. Все остальные клетки таблицы оставляем без изменения. Новый план *X*2 получим в табл.1.8.

Число базисных клеток: *m* + *n* – 1 = 6. Покажем, что новый план лучше предыдущего и вычислим величину изменения целевой функции ∆*Z.* Рассмотрим оценку

∆14 = *U*1 + *V*4 – *c*14 .

Перемещая груз *Q* по циклу, мы изменяем величину целевой функции на следующую величину:

∆*Z* = *С*14 · *Q* – *c*11 · *Q* + *c*21 · *Q* – *c*22 · *Q* + *c*32 · *Q* – *c*34 · *Q* =

= (*c*14 – *c*11 + *c*21 – *c*22 + *c*32 – *c*34 ) · *Q* . (1.12)

Запишем условия (1.6) для всех клеток цикла пересчета, кроме (1.4), получим:

*U*1 + *V*1 = *c*11

*U*2 + *V*1 = *c*21

*U*2 + *V*2 = *c*22

*U*3 + *V*2 = *c*32

*U*3 + *V*4 = *c*34

Первое, третье и пятое уравнение умножим на « – 1» и затем сложим со вторым и четвертым уравнениями, получим:

– *U*1 – *V*4 = – *c*11 + *c*21 – *c*22 + *c*32 – *c*34 (1.13)

Подставим (1.13) в (1.12), получим:

∆*Z* = (*c*14 – *U*1 – *V*4) · *Q.*

Учитывая, что: ∆14 = *U*1 + *V*4 – *c*14 , получим «– ∆14 = – *U*1 – *V*4 + *c*14  » и тогда

∆*Z* = – ∆14 · *Q* . (1.14)

Так как ∆14 > 0, *Q* > 0, то ∆*Z* = – ∆14 · *Q* < 0 и значение целевой функции уменьшается.

*Таблица 1.8*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 300 | 500 | 100 | 200 | *Ui* |
| 100 | 3  ― | 6  ― | 5  ― | 1  100 | *U*1= 0 |
| 400 | 1  300 | 4  100 | 3  ― | 2  ― | *U*2 = 2 |
| 600 | 4  ― | 3  400 | 1  100 | 2  100 | *U*3 = 1 |
| Vj | V1=-1 | V2=2 | V3=0 | V4=1 |  |

Из таблицы 1.8 выписываем новый план перевозок:



со стоимостью транспортировки:

*Z*(*X*2) = 1∙100 + 1∙300 + 4∙100 + 3∙400 + 1∙100 + 2∙200 = 2300 у.е.

*Z*(*X*2) = 2300 < *Z*(*X*1) = 2700.

Стоимость транспортировки уменьшилось на величину

Δ*Z* = *Z*(*X*1) – *Z*(*X*2) = 2700 – 2300 = 400.

Для контроля вычислений величину Δ*Z* можно вычислить по формуле:

Δ*Z* = *Q* ∙Δ14, где Δ14 = 4, а *Q* = 100.

Действительно, Δ*Z* = 100∙4 = 400, результат совпадает со значением Δ*Z*, найденным выше, значит, вычисления проведены верно.

Новый опорный план *X*2 проверяем на оптимальность аналогично тому, как это делалось для плана *X*1, т.е. для плана *X*2 выполняем 2-й шаг метода. Для всех базисных клеток табл. 1.8 записываем систему уравнений:



Полагаем *U*1 = 0 и находим остальное значение потенциалов.

Запишем их в последних строке и столбце табл.1.8. Затем вычисляем значения оценок Δ*ij* для свободных оценок:

Δ11 = –4 < 0,

Δ12 = –4 < 0,

Δ13 = –5 < 0,

Δ23 = –1 < 0,

Δ24 = 1 > 0,

Δ31 = –4 < 0.

План *X*2 не оптимален, так как условия оптимальности нарушены для клетки (2,4). Клетку (2,4) будем считать базисной, и составим для нее цикл пересчета. Выполним это в табл.1.9.

Отрицательными являются клетки (2,2) и (3,4), в них записаны перевозки *x*22 = *x*34 = 100.

Вычисляем *Q*:

*Q* = min(100;100) = 100.

Аналогично тому, как это было сделано выше, пересчитаем план перевозок, перевозки в отрицательных клетках уменьшаем на *Q* = 100, а в положительных – увеличиваем на *Q* = 100.

*Таблица 1.9*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 300 | 500 | | 100 | 200 | | *Ui* |
| 100 | 3  – | 6  – | | 5  – | 1  100 | | *U*1= 0 |
| 400 | 1  300 | 4  100 –Q | | 3  – | 2  – +Q | | *U*2 = 2 |
| 600 | 4  – | 3  400 +Q | | 1  100 | 2  100 –Q | | *U*3 = 1 |
| *Vj* | *V*1 = *–*1 | *V*2 = 2 | *V*3 = 0 | | | *V*4 = 1 |  |

Нулевые значения перевозок получают в клетках (2,2) и (3,4), поэтому одну из них, например, (2,2), будем считать свободной, а (3,4) – базисной, и запишем в нее базисный ноль, так как клетка (2,4) становится базисной и только одна из отрицательных клеток должна быть свободной. Число базисных клеток для нового плана *X*3 должно быть равно: *m + n* – 1 = 6.

В результате этих действий получаем новый план *X*3, записанный в табл. 1.10.

*Таблица 1.10*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 300 | 500 | 100 | 200 | *Ui* |
| 100 | 3  ― | 6  ― | 5  ― | 1  100 | *U*1= 0 |
| 400 | 1  300 | 4  ― | 3  ― | 2  100 | *U*2 = 1 |
| 600 | 4  ― | 3  500 | 1  100 | 2  0 | *U*3 = 1 |
| *Vj* | *V*1 = 0 | *V*2 = 2 | *V*3 = 0 | *V*4 = 1 |  |



Вычисляем затраты на транспортировку:

*Z*(*X*3) = 1∙100 + 1∙300 + 2∙100 + 3∙500 + 1∙100 = 2200 у.е.;

*Z*(*X*3) = 2200 < *Z*(*X*2) = 2300.

План *X*3 является вырожденным, базисная переменная *x*34 = 0, клетка (3,4) – базисная.

Проверим вычисления:

Δ*Z* = *Z*(*X*2) – *Z*(*X*3) = 2300 – 2200 = 100.

С другой стороны,

Δ*Z* = *Q* ∙Δ24 = 100∙1 = 100, т.е. расчеты проведены правильно.

План *X*3 проверяем на оптимальность. Для базисных клеток составляем систему уравнений:



Полагая *U*1 = 0, находим остальные значения потенциалов, которые записываем в табл.1.10 в соответствующих строке и столбце.

Вычисляем значения оценок Δ*ij*для свободных клеток:

Δ11 = –3 < 0;

Δ12 = –4 < 0;

Δ13 = –5 < 0;

Δ22 = –1 < 0;

Δ23 = –2 < 0;

Δ31 = –3 < 0.

Все оценки Δ*ij* < 0, значит, план *X*3 является оптимальным. Вспоминая смысловое содержание задачи, запишем ответ.

**Ответ:** Первому населенному пункту следует перевезти 300 т удобрений со 2-й станции; второму – 500 т с 3-й станции, третьему – 100 т с 3-й станции и четвертому – 100 т с 1-й и 100 т со 2-й станции. Суммарная минимальная стоимость транспортировки груза составляет 2200 у.е..

**Замечание:** Процесс пересчета циклов в T.З. всегда конечен, поскольку число способов выбора базисных переменных не более, чем число

– конечное число.

## Транспортаная задача с нарушенным балансом потребителей и поставщиков

Рассмотрим ***Т.З***., для которых не выполняется условие разрешимости, т.е. для которых



Т.З. в этом случае называется открытой или Т.З. с нарушенным балансом ресурсов и потребностей. Открытые Т.З. бывают двух типов:

1. ; 2. .

Для таких задач также можно найти план с минимальными транспортными издержками.

Запишем математические модели таких задач.

Пусть

, тогда модель имеет вид:





.

Если .

Тогда модель имеет вид:





.

Чтобы решить эти задачи симплексным методом, необходимо привести их к стандартному виду. Для этого в первой задаче вводятся дополнительные неотрицательные переменные *xi,n+*1 ≥ 0,  такие, что

, 

а во второй – переменные *xm*+1,*j* ≥ 0, , такие, что

, .

Чтобы решить открытую Т.З. методом потенциалов, следует привести ее к эквивалентной Т.З., для которой условия разрешимости выполняются. Пусть



Введем фиктивного (*n* + 1)-го потребителя с потребностью в грузе



и стоимостью транспортировки единицы груза *Ci*,*n*+1 = 0, . Теперь имеем Т.З. с закрытой моделью

.

Решим ее методом потенциалов. Если для нее получен оптимальный план

; , то план ;, будет оптимальным для исходной задачи.

Часть груза, предназначающаяся фиктивному потребителю, окажется при этом невывезенной. Если для открытой Т.З.

,

то введем фиктивного (*m* + 1)-го поставщика с запасом груза



и стоимостью транспортировки единицы груза *Cm*+1,*j* = 0, . Получим закрытую Т.З.:



Ее оптимальный план ;, определит и оптимальный план исходной открытой задачи: ;.

При этом потребности полностью удовлетворены не будут.

Введение (*n* + 1)-го фиктивного потребителя эквивалентно введению дополнительных переменных *xi,n*+1 ≥ 0, , а (*m* + 1)-го фиктивного поставщика – переменных *xm*+1,*j* ≥ 0, , при приведении соответствующих задач к стандартному виду и их решении симплексным методом.

**Пример 1.3**.

Пусть условия Т.З. даны в табл. 1.11.

*Таблица 1.11*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 50 | 50 | 100 |
| 100 | 1 | 3 | 5 |
| 50 | 2 | 4 | 6 |
| 30 | 7 | 1 | 2 |

Проверим выполнение условия разрешимости.

; 



Т.З. является открытой. Ее математическая модель:

*xij* ≥ 0, 



*Z* = 1·*x*11 + 3·*x*12 + …+ 2·*x*33 → min.

Перейдем к эквивалентной Т.З.. Для этого введем фиктивного 4-го поставщика с запасом груза *a*4 = 200 – 180 = 20 и с тарифами, равными нулю.

Условие новой задачи запишем в табл. 1.12.

*Таблица 1.12*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 50 | 50 | 100 |
| 100 | 1 | 3 | 5 |
| 50 | 2 | 4 | 6 |
| 30 | 7 | 1 | 2 |
| 20 | 0 | 0 | 0 |

Для этой задачи условия разрешимости выполнены, и ее можно решить методом потенциалов, как это было сделано в примере 1.1.

Рассмотрим второй тип открытой транспортной задачи.

**Пример 1.4.**

Условия Т.З. даны в таблице 1.13

*Таблица 1.13*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 120 | 60 |
| 125 | 10 | 3 |
| 70 | 12 | 5 |

Проверим выполнение условия разрешимости:

*a*1 + *a*2 = 125 + 70 = 195,

*b*1 + *b*2 = 120 + 60 = 180,

.

Транспортная задача является открытой.

Математическая модель задачи:

*xij* ≥ 0*, i, j* = 1,2



*Z* = 10*x*11 + 3*x*12 + 12*x*21 + 5*x*22 → min

Перейдем к эквивалентной закрытой транспортной задаче. Введем третьего фиктивного потребителя с потребностью *b*3 = 195 – 180 = 15 и тарифами равными нулю, условия которой записаны в табл.1.14.

*Таблица 1.14*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 120 | 60 | 15 |
| 125 | 10 | 3 | 0 |
| 70 | 12 | 5 | 0 |

Для этой задачи условия разрешимости выполнены, и ее можно решить методом потенциалов.

**Замечания.**

**1)** Если по маршруту (*r,k*) запрещен перевоз груза, то тариф *Crk* необходимо положить равным очень большому числу (**M** > 0), и при решении задачи в оптимальном плане перевозить груз по этому маршруту будет нецелесообразно.

**2)** При решении Т.З. на максимум оптимальным будет являться план, для которого все оценки ∆*ij* свободных клеток будут неотрицательными: ∆*ij* ≥ 0. Цикл пересчета следует строить для клетки, у которой наименьшая отрицательная оценка ∆*ij* < 0. Чтобы не менять правила решения Т.З. на максимум следует выполнить следующее.

Целесообразно перейти к Т.З. на минимум. В этом случае оценки свободных клеток вычисляются по формулам:

Δ*ij = Cij – Ui – Vj* ,

а все остальное остается без изменений.

# Приложение транспортной задачи

## Задачи оптимальной транспортировки продукции

### Задача о транспортировки сельскохозяйственной продукции

Два фермерских хозяйства поставляют ежедневно молоко для снабжения четырех населенных пунктов. Объемы поставок *ai*,  (ц), потребности населенных пунктов *bj*,  (ц) и затраты *Cij*, ,, на перевозку 1ц (у.е./ц) молока от фермерских хозяйств до населенных пунктов даны в таблице 1.

*Таблица 1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 80 | 75 | 135 | 20 |
| 150 | 7  *x*11 | 6  *x*12 | 5  *x*13 | 3  *x*14 |
| 140 | 6  *x*21 | 5  *x*22 | 2  *x*23 | 3  *x*24 |

Это Т.З. открытого типа, так как

,

.

Математическая модель задачи:

*xij*≥ 0, ,,



*Z* = 7*x*11 + 6*x*12 + 5*x*13 + 3*x*14 + 6*x*21 + 5*x*22 + 2*x*23 + 3*x*24 → min.

Перейдем к эквивалентной Т.З. закрытого типа. Введем третьего фиктивного поставщика с запасом *a*3 = 310 – 290 = 20 и с тарифами

*C*31 = *C*32 = *C*33 = *C*34 = 0 (таблица 2.1).

*Таблица 2.1*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 80 | 75 | 135 | 20 |
| 150 | 7  *x*11 | 6  *x*12 | 5  *x*13 | 3  *x*14 |
| 140 | 6  *x*21 | 5  *x*22 | 2  *x*23 | 3  *x*24 |
| 20 | 0  *x*31 | 0  *x*32 | 0  *x*33 | 0  *x*34 |

Заполнение клеток таблицы методом «северо–западного» угла будем проводить в следующем порядке (см. таблице 2.2):

*x*11 = min(150,80) = 80,

= 150 – 80 = 70, исключаем 1-й столбец;

*x*12 = min(70,75) = 70,

= 75 – 70 = 5, исключаем 1-ю строку;

*x*22 = min(140,5) = 5,

 = 140 – 5 = 135, исключаем 2-й столбец;

*x*23 = min(135,135) = 135.

Теперь и весь груз от второго поставщика вывезен и потребность третьего потребителя полностью удовлетворена. В этом случае следует исключить что-то одно: или 2-ю строку, или 3-й столбец. Условимся для определенности исключать строку – поставщика, а столбец – потребителя оставлять с потребностью = 0. Находим

*x*33 = min(20,0) = 0.

Исключаем 3-й столбец и заполняем последнюю клетку таблицы:

*x*34 = min(20,20) = 20.

Найденный вырожденный опорный план *X*1 записываем в таблице 2.2, в которой и будем проверять его на оптимальность.

*Таблица 2.2*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | *bj*  *ai* | 80 | 75 | 135 | 20 | *Ui* |
|  | 150 | 7  80 –Q | 6  70 +Q | 5  – | 3  – | *U*1=0 |
|  | 140 | 6  – | 5  5 –Q | 2  135 +Q | 3  – | *U*2=-1 |
|  | 20 | 0  – +Q | 0  – | 0  0  -Q | 0  20 | *U*3=-3 |
|  | *Vj* | *V*1=7 | *V*2=6 | *V*3=3 | *V*4=3 |

*X*1 = 

Число базисных заполненных клеток: *m + n* – 1 = 3 + 4 – 1 = 6 и в таблице шесть заполненных клеток, включая и клетку (3,3) с базисным нулем.

Вычисляем *Z*(*X*1) = 1275.

Потенциалы находим непосредственно в табл. 2.11 и записываем их в ее последних столбце и строке.

Вычисляем оценки свободных клеток:

∆13 = –2 < 0, ∆14 = 0, ∆21 = 0, ∆24 = –1 < 0, ∆31 = 4 > 0, ∆32 = 3 > 0.

План *X*1 не оптимален. Строим в таблице 2.11 цикл пересчета для клетки (3,1); определяем *Q*:

*Q* = min(80; 5; 0) = 0.

В отрицательной клетке (3,3) цикла записана нулевая перевозка (базисный ноль), поэтому *Q* = 0. После пересчета план не изменится, но изменится состав базисных клеток: клетка (3,1) станет базисной, и в не записываем базисный ноль, а в клетке (3,3) ставим прочерк.

План *X*2 = *X*1 записан в таблице 2.3.

*Таблица 2.3*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 80 | 75 | 135 | 20 | *Ui* |
| 150 | 7  80 –Q | 6  70 | 5  – | 3  – +Q | *U*1=0 |
| 140 | 6  – | 5  5 | 2  135 | 3  – | *U*2=-1 |
| 20 | 0  0 +Q | 0  – | 0  – | 0  20 –Q | *U*3=-7 |
| *Vj* | *V*1=7 | *V*2=6 | *V*3=3 | *V*4=7 |

Базисных заполненных клеток 6.

*Z*(*X*2) = *Z*(*X*1) = 1275.

В табл. 2.12 находим новые значения потенциалов и вычисляем оценки свободных клеток:

∆13 = –2 < 0, ∆14 = 4 > 0, ∆21 = 0, ∆24 = 3 > 0, ∆31 = –1 < 0, ∆33 = –4 < 0.

План *X*2 не оптимален, строим в табл. 2.12 цикл пересчета для клетки (1,4) и определяем *Q*:

*Q* = min(80,20) = 20.

Новый план *X*3 получаем в таблице 2.4.

*Таблица 2.4*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 80 | 75 | 135 | 20 | *Ui* |
| 150 | 7  60 | 6  70 | 5  – | 3  20 | *U*1=0 |
| 140 | 6  – | 5  5 | 2  135 | 3  – | *U*2= – 1 |
| 20 | 0  20 | 0  – | 0  – | 0  – | *U*3= – 7 |
| *Vj* | *V*1=7 | *V*2=6 | *V*3=3 | *V*4=3 |

*X*3 = 

Базисных (заполненных) клеток 6.

*Z*(*X*3) = 1195; ∆*Z* = *Z*(*X*2) – *Z*(*X*3) = 1275 – 1195 = 80;

∆*Z* = ∆14 ·*Q* = 4·20 = 80.

Находим новые значения потенциалов в табл.2.13 и вычисляем оценки ∆*ij*:

∆13 = –2 < 0, ∆21 = 0, ∆24 = –1 < 0, ∆32 = –1 < 0, ∆33 = –4 < 0; ∆34 = –4 < 0.

План *X*3 оптимален, поскольку все оценки ∆*ij* ≤ 0.

**Ответ**. Из первого хозяйства необходимо перевезти 60ц в первый населенный пункт, 70ц – во второй и 20ц – в четвертый; из второго хозяйства следует вывезти 5ц во второй населенный пункт и 135ц в третий. Первый населенный пункт не удовлетворен полностью, он получает только 60ц вместо 80.

Суммарная минимальная стоимость транспортировки молока составляет 1195 у.е.

### Задача о транспортировки промышленных товаров

В резерве трех железнодорожных станций А1, A2, A3 находятся соответственно 15, 25, 5 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки угля, если пункту 1 необходимо 5 вагонов, пункту 2 – 15 вагонов, пункту 3 – 15 вагонов и пункту 4 – 10 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции А1 в указанные пункты соответственно равны 10, 0, 20, 11 у.е., со станции A2 – 12, 7, 9 и 20 у.е., со станции A3 – 0, 14, 16, 18 у.е.

*Таблица 2.14*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 240 | 290 | 180 |
| 220 | 1  *x*11 | 1  *x*12 | 1  *x*13 |
| 200 | 2  *x*21 | 8  *x*22 | 3  *x*23 |
| 210 | 8  *x*31 | 7  *x*32 | 5  *x*33 |
| 220 | 5  *x*41 | 3  *x*42 | 10  *x*43 |

Проверим выполнение условия разрешимости:

; 

Условие не выполняется, задача открытого типа. Ее математическая модель:

*xij* ≥ 0 , ,



*Z* = 1 · *x*11 + 1 · *x*12 + …+10 · *x*43 → min.

Переходим к эквивалентной Т.З. закрытого типа, вводим четвертого фиктивного потребителя с потребностью *b*4 = 850 – 710 = 140 и тарифами:

*C*14 = *C*24 = *C*34 = *C*44 = 0. Условия задачи записываем в табл. 2.15. В этой же таблице найдем исходный опорный план и затем проверим его на оптимальность.

*Таблица 2.15*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | *bj*  *ai* | 240 | 290 | 180 | 140 | *Ui* |
|  | 220 | 1  220 –Q | 1  – +Q | 1  – | 0  – | *U*1=0 |
|  | 200 | 2  20 +Q | 8  – | 3  180 –Q | 0  – | *U*2=1 |
|  | 210 | 8  – | 7  70 –Q | 5  0 +Q | 0  140 | *U*3=3 |
|  | 220 | 5  – | 3  220 | 10  – | 0  – | *U*4=-1 |
|  | *Vj* | *V*1=1 | *V*2=4 | *V*3 = 2 | *V*4=-3 |

Исходный опорный план найдем методом минимального элемента (табл. 2.15) следующим образом. Поскольку у фиктивного потребителя тарифы равны нулю, он не влияет на значение целевой функции, поэтому клетки 4-го столбца заполняем в последнюю очередь. Наименьший тариф, равный единице, записан в трех клетках. Выбираем любую из них, например клетку (1,1), и находим *x*1:

*x*11 = min(220,240) = 220, первую строку временно исключаем из рассмотрения = 20.

Далее действуем аналогично:

*x*21 =min(200,20) = 20, исключаем первый столбец,

= 180.

*x*23 = min(180,180) = 180.

После определения перевозки *x*23 исключаем из рассмотрения 2-ю строку (поставщика), а 3-й столбец (потребителя) оставляем с запасом  = 0.

*x*42 = min(220,290) = 220, исключаем 4-ю строку,

 = 70.

*x*33 = min(210,0) = 0, исключаем 3-й столбец.

*x*32= min(210,70) = 70, исключаем 2-й столбец,

 = 140.

*x*34 = min(140,140) = 140.

Найденные значения перевозок (план *X*1) записываем в табл. 2.15. Число базисных клеток: *m + n* – 1 = 7, и в таблице семь заполненных клеток.

*X*1 = 

Вычисляем *Z*(*X*1):

*Z*(*X*1) = 1950.

Проверяем план *X*1 на оптимальность, значения потенциалов находим в таблице (2.15). Затем вычисляем оценки свободных клеток:

∆12 = 3 > 0; ∆13 =1 > 0; ∆14 = –3 < 0; ∆22 = –3 < 0; ∆24 = –2 < 0;

∆31 = –4 < 0; ∆41 = –5 < 0; ∆43 = –9 < 0; ∆44 = –4 < 0.

План *X*1 не оптимален. В табл. 2.15 строим цикл пересчета для клетки (1,2).

Находим

Q = min(220; 180; 70) = 70.

Новый план *X*2 записываем в табл.2.16. Далее решение проведем без объяснений.

*Таблица 2.16*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 240 | 290 | 180 | 140 | *Ui* |
| 220 | 1  150 –Q | 1  70 | 1  – +Q | 0  – | *U*1 = 0 |
| 200 | 2  90 +Q | 8 – | 3  110 –Q | 0  – | *U*2 = 1 |
| 210 | 8  – | 7  – | 5  70 | 0  140 | *U*3 = 3 |
| 220 | 5  – | 3  220 | 10  – | 0  – | *U*4 = 2 |
| *Vj* | *V*1 = 1 | *V*2 = 1 | *V*3 = 2 | *V*4 =-3 |

*X*2 = .

*Z*(*X*2) = 1740.

В таблице одна клетка (1,3) с положительной оценкой ∆13 = 1 > 0. Строим цикл пересчета для этой клетки в табл. 2.16

*Q* = 110.

Новый план *X*3 получим в табл. 2.17.

*Таблица 2.17*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 240 | 290 | 180 | 140 | *Ui* |
| 220 | 1  40 | 1  70 | 1  110 | 0  – | *U*1 = 0 |
| 200 | 2  200 | 8  – | 3  – | 0  – | *U*2 = 1 |
| 210 | 8  – | 7  – | 5  70 | 0  140 | *U*3 = 4 |
| 220 | 5  – | 3  220 | 10  – | 0  – | *U*4 = 2 |
| *Vj* | *V*1 = 1 | *V*2 = 1 | *V*3 = 1 | *V*4 = – 4 |

*X*3 = .

*Z*(*X*3) = 1630.

Этот план оптимален, т.к. все оценки свободных клеток: ∆*ij* ≤ 0

(проверить самостоятельно).

**Ответ:** От первого поставщика следует вывозить 40 ед. первому, 70ед. второму и 110 ед. груза третьему потребителям. От второго поставщика весь груз 200 ед. следует перевозить первому потребителю; от третьего поставщика 70 ед. третьему потребителю и от четвертого поставщика весь груз 220 ед. второму потребителю. У третьего поставщика остается в запасе еще 140 ед. груза. Минимальная стоимость транспортировки 1630 у.е.

## Задачи оптимального производства товаров

### Задача о производстве продукции аграрных предприятий

На участках различного плодородия необходимо посеять пшеницу, кукурузу и подсолнечник. Площадь первого участка равна 350 га: второго участка: 400га; третьего: 250 га и четвертого: 500га. С учетом запаса семян предполагается засеять 100 га пшеницей; 1200 га кукурузой и 200 га подсолнечником. Данные об урожайности (ц/га), затратам на 1 га (у.е.) по участкам закупочные цены 1ц продукции (у. е.); даны в таблице 2.18. Найти план посева максимизирующий прибыль.

*Таблица 2.18.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Культура | Урожайность по участкам, ц/га | | | | Закупоч-ные цены, у. е. | Затраты на 1га по участкам, у. е. | | | |
| I | II | III | IV | I | II | III | IV |
| Пшеница | 28 | 30 | 26 | 25 | 6 | 39 | 42 | 41 | 38 |
| Кукуруза | 30 | 32 | 28 | 26 | 5 | 40 | 41 | 43 | 44 |
| Подсолнечник | 32 | 34 | 30 | 31 | 7 | 35 | 37 | 38 | 40 |

**Решение.** Эта задача не является Т.З., но её можно свести к Т.З. на максимум. Обозначим посевные площади под сельскохозяйственные культуры с учетом запасов семян через: *ai*, ; а площади участков: *bj*, . Тогда:

*а*1 = 100, *b*1 = 350,

*а*2 = 1200, *b*2 = 400,

*а*3 = 200, *b*3 = 250,

*b*4 = 500.

Проверим условие разрешимости Т.З.:

, .

Модель закрытая.

Обозначим урожайности по участкам: *rij*, а затраты на 1 га по участкам: *zij*, закупочные цены: *Pi*. С учетом исходных данных получим матрицы:

; 

и значения закупочных цен: *P*1 = 6; *P*2 = 5; *P*3 = 7. Значения прибылей , ,  от посева культур по участкам будут вычисляться по формуле:

*Cij* = *rij* · *Pi* – *zij*, , .

Получим матрицу прибыли (*Сij*)3 **·** 4:

.

Обозначим через *xij* – посевную площадь участка *j* засеянную культурой *i* (, ).

Занесем данные в таблицу 2.19.

*Таблица 2.19.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 350 | 400 | 250 | 500 |
| 100 | 129  *x*11 | 138  *x*12 | 115  *x*13 | 112  *x*14 |
| 1200 | 110  *x*21 | 119  *x*22 | 97  *x*23 | 86  *x*24 |
| 200 | 189  *x*31 | 201  *x*32 | 172  *x*33 | 177  *x*34 |

Математическая модель задачи:

1. *xij* ≥ 0; , ,



*Z* = 129*x*11 + 138*x*12 + 115*x*13 + 112*x*14 + 110*x*21 + 119*x*22 + 97*x*23 + 86*x*24 +

+ 189*x*31 + 201*x*32 + 172*x*33 + 177*x*34 → max.

Имеем Т.З. на максимум.

Исходный опорный план найдем без объяснений, аналогично описанному в главе 1, методом северо-западного угла и занесем данные в табл. 2.20, в этой же таблице будем проверять полученный план на оптимальность, поставив в соответствие поставщикам потенциалы *U*1, *U*2, *U*3, а потребителям: *V*1, *V*2, *V*3, *V*4. В Т.З. на максимум значения потенциалов находятся так же, как и в задаче на минимум, т.е. для всех базисных клеток таблицы составляется и решается система уравнений:

*Ui* + *Vj* = *Cij*.

А оценки свободных клеток вычисляются по формулам:

∆*ij* = *Cij* – *Ui* – *Vj*.

План оптимален, если все оценки ∆*ij* ≤ 0.

*Таблица 2.20.*

 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 350 | 400 | 250 | 500 | *Ui* |
| 100 | 129  – *Q*  100 | 138  ― | 115  ― | 112  + *Q*  ― | *U*1 = 19 |
| 1200 | 110  + *Q*  250 | 119  400 | 97  250 | 86  – *Q*  300 | *U*2 = 0 |
| 200 | 189  ― | 201  ― | 172  ― | 177  200 | *U*3 = 91 |
| *Vj* | *V*1 = 110 | *V*2 = 119 | *V*3 = 97 | *V*4 = 86 |  |







;

*Z*(*X*1) = 129 · 100 + 110 · 250 + 119 · 400 + 97 · 250 +

+ 86 · 300 + 177 · 200 = 173450.

Потенциалы найдем в таблице, положив *U*2 = 0. Оценки свободных клеток:

∆12 = 138 – 19 – 119 = 0,

∆13 = 115 – 19 – 97 = – 1 < 0,

∆14 = 112 – 19 – 86 = 7 > 0,

∆31 = 189 – 91 – 110 = – 12 < 0,

∆32 = 201 – 91 – 119 = – 9 < 0,

∆33 = 172 – 91 – 97 = – 16 < 0.

План не оптимален, строим в табл. 2.20 цикл пересчета для клетки (1, 4).

*Q* = min(100; 300) = 100.

Новый план *X*2 получим в таблице 2.21. Значение *Z*(*X*2) должно быть больше *Z*(*X*1).

*Таблица 2.21.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 350 | 400 | 250 | 500 | *Ui* |
| 100 | 129  ― | 138  ― | 115  ― | 112  100 | *U*1 = 26 |
| 1200 | 110  350 | 119  400 | 97  250 | 86  200 | *U*2 = 0 |
| 200 | 189  ― | 201  ― | 172  ― | 177  200 | *U*3 = 91 |
| *Vj* | *V*1 = 110 | *V*2 = 119 | *V*3 = 97 | *V*4 = 86 |  |

;

*Z*(*X*2) = 112 · 100 + 110 · 350 + 119 · 400 + 97 · 250 +

+ 86 · 200 + 177 · 200 = 174150 > *Z*(*X*1) = 173450.

Проверка:

∆*Z* = *Z*(*X*2) – *Z*(*X*1) = 174150 – 173450 = 700.

∆*Z* = *Q* · ∆14 = 100 · 7 = 700.

Расчеты верные. Далее решаем задачу без словесных объяснений.

∆11 = 129 – 26 – 110 = – 7 < 0,

∆12 = 138 – 26 – 119 = – 7 < 0,

∆13 = 115 – 26 – 97 = – 8 < 0,

∆31 = 189 – 91 – 110 = – 12 < 0,

∆32 = 201 – 91 – 119 = – 9 < 0,

∆33 = 172 – 91 – 97 = – 16 < 0.

План *X*2 оптимален, т.к. все оценки свободных клеток ∆*ij* ≤ 0.

**Ответ:** Первый, второй и третий участки следует полностью засеять кукурузой. На четвертом участке следует 100 га засеять пшеницей, 200 га – кукурузой и 200 га подсолнечником.

Максимальная прибыль составит 174150 у. е.

### Задача о производстве промышленной продукции

На трех станках производственные мощности, которых равны 150, 200 и 500 станко-часов соответственно за 1 час можно изготовить 120, 100 и 180 деталей трех видов соответственно. Составить оптимальную программу загрузки станков, если **прибыль** (в у. е.) от реализации одной детали вида *i* при её изготовлении на станке *j* равна *Сij*. Значения *Сij* заданы матрицей *С*:

.

Суммарная потребность в деталях каждого вида равна соответственно: 50, 60 и 30 тыс. деталей первого, второго и третьего видов соответственно, при этом деталь первого вида **не может** производиться на третьем станке.

**Решение.**  Необходимо определить, какое количество деталей каждого вида надо изготовлять на каждом станке, чтобы суммарная прибыль от их реализации была максимальной.

Выясним, сколько деталей всех трёх видов можно изготовить на каждом станке.

На первом станке можно изготовить:

150 · 120 = 18(тыс. деталей);

на втором:

200 · 100 = 20(тыс. деталей);

и на третьем:

500 · 180 = 90(тыс. деталей).

Суммарная потребность в деталях всех трёх видов равна:

50 + 60 + 30 = 140 (тыс. деталей).

А суммарные производственные мощности трех станков составляют:

18 + 20 + 90 = 128 (тыс. деталей).

Обозначим:

*а*1 = 50, *b*1 = 18,

*а*2 = 60, *b*2 = 20,

*а*3 = 30, *b*3 = 90.

Пусть *xij* – количество деталей (в тыс. шт.) вида *i* изготовленных на станке вида *j*. Занесем данные в таблицу 2.22.

*Таблица 2.22.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 18 | 20 | 90 |
| 50 | 2  *x*11 | 2,5  *x*12 | – M  *x*13 |
| 60 | 4  *x*21 | 3  *x*22 | 4  *x*23 |
| 30 | 2  *x*31 | 4  *x*32 | 3  *x*33 |

Буква «– М» - означает «запрет транспортировки от первого поставщика к первому потребителю», это соответствует тому, что деталь первого вида не может производиться на третьем станке.

Для этого полагаем: – М = – *∞*.

.

Имеем Т.З. открытого типа на максимум.

Математическая модель задачи:

*xij* ≥ 0; , ,



*Z* = 2*x*11 + 2,5*x*12 + … + 3*x*33 → max.

Перейдем к задаче закрытого типа, введем 4-й фиктивный станок – поставщика с тарифами равными нулю (табл. 2.23). Исходный опорный план находим в табл. 2.23 методом минимального элемента.

*Таблица 2.23.*



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 18 | 20 | 90 | 12 | *Ui* |
| 50 | 2  18 | 2,5  – *Q*  20 | – M  ― | 0  + *Q*  12 | *U*1 = 0 |
| 60 | 4  ― | 3  ― | 4  + *Q*  60 | 0  – *Q*  0 | *U*2 = 0 |
| 30 | 2  ― | 4  + *Q*  ― | 3  – *Q*  30 | 0  ― | *U*3 = – 1 |
| *Vj* | *V*1 = 2 | *V*2 = 2,5 | *V*3 = 4 | *V*4 = 0 |  |

\







;

*Z*(*X*1) = 2 · 18 + 2,5 · 20 + 4 · 6 + 3 · 30 = 200.

Далее решение проводим без объяснений.

∆13 = – М – 0 – 4 = – М– 4 < 0,

∆21 = 4 – 0 – 2 = 2 > 0,

∆22 = 3 – 0 – 2,5 = 0,5 > 0,

∆31 = 2 + 1 – 2 = 1 > 0,

∆32 = 4 + 1 – 2,5 = 2,5 > 0, max

∆34 = 0 + 1 – 0 = 1 > 0.

Строим цикл пересчета для клетки (3, 2).

*Q* = min(20; 0; 30) = 0.

*Таблица 2.24.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 18 | 20 | 90 | 12 | *Ui* |
| 50 | 2  18 | 2,5  20 | – M  ― | 0  12 | *U*1 = 0 |
| 60 | 4  ― | 3  ― | 4  60 | 0  ― | *U*2 = 2,5 |
| 30 | 2  ― | 4  0 | 3  30 | 0  ― | *U*3 = 1,5 |
| *Vj* | *V*1 = 2 | *V*2 = 2,5 | *V*3 = 1,5 | *V*4 = 0 |  |

*X*2 = *X*1;

*Z*(*X*2) = *Z*(*X*1) = 200.

∆13 = – М – 0 – 1,5 = – М – 1,5 < 0,

∆21 = 4 – 2,5 – 2 = – 0,5 < 0,

∆22 = 3 – 2,5 – 2,5 = – 2 < 0,

∆24 = 0 – 2,5 – 0 = – 2,5 < 0,

∆31 = 2 – 1,5 – 2 = – 1,5 < 0,

∆34 = 0 – 1,5 – 0 = – 1,5 < 0.

План *X*2 оптимален.

**Ответ:** На первом станке следует изготовить 18 тыс. деталей первого вида; на втором станке: 20 тыс. деталей первого вида; на третьем станке: 60 тыс. деталей второго и 30 тыс. деталей третьего видов. Спрос на детали первого вида не будет удовлетворен на 12 тыс. шт. Максимальная прибыль составит: 200 у. е.

## Задача оптимального назначения

Имеется 4 работы и 4 исполнителя. Известны затраты *Сij*,  на выполнение *i*-м исполнителем работы *j*. Эти значения заданы матрицей:

.

Требуется назначить каждого исполнителя на одну и только одну работу и чтобы каждая работа выполнялась одним исполнителем, при этом чтобы суммарные затраты были минимальными.

**Решение.**  Знаем, что задача сводится к закрытой Т.З., у которой все значения *ai* = 1 и *bj* = 1,  и переменные *xij* принимают значения:

.

Занесем исходную информацию в таблицу 2.25.

*Таблица 2.25.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 6  *x*11 | 4  *x*12 | 3  *x*13 | 2  *x*14 |
| 1 | 3  *x*21 | 2  *x*22 | 5  *x*23 | 4  *x*24 |
| 1 | 4  *x*31 | 3  *x*32 | 1  *x*33 | 1  *x*34 |
| 1 | 2  *x*41 | 1  *x*42 | 2  *x*43 | 3  *x*44 |

Математическая модель задачи:

*xij* ≥ 0; ,



*Z* = 6*x*11 + 4*x*12 + … + 3*x*44 → min.

Найдем исходный опорный план методом минимального элемента, запишем его в таблицу 2.26 и в этой же таблице проверим его на оптимальность.

Решение проведем без объяснений.

*Таблица 2.26.*

   

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 1 | 1 | 1 | 1 | *Ui* |
| 1 | 6  ― | 4  ― | 3  1 | 2  0 | *U*1 = 0 |
| 1 | 3  1 | + Q 2  0 | – Q 5  0 | 4  ― | *U*2 = 2 |
| 1 | 4  ― | 3  ― | 1  ― | 1  1 | *U*3 = – 1 |
| 1 | 2  ― | – Q 1  1 | + Q 2  ― | 3  ― | *U*4 = 1 |
| *Vj* | *V*1 = 1 | *V*2 = 0 | *V*3 = 3 | *V*4 = 2 |  |

.

*Z*(*X*1) = 3 + 3 + 1 + 1 = 8.

План не оптимален, оценка: ∆43 = 1 + 3 – 2 = 2 > 0;

строим цикл для клетки (4,3).

*Q* = min(0; 1) = 0.

Новый план *X*2 = *X*1 получим в таблице 2.27.

*Таблица 2.27.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 1 | 1 | 1 | 1 | *Ui* |
| 1 | 6  ― | 4  ― | – Q 3  1 | + Q 2  0 | *U*1 = 0 |
| 1 | 3  1 | 2  0 | 5  ― | 4  ― | *U*2 = 0 |
| 1 | 4  ― | 3  ― | + Q 1  ― | – Q 1  1 | *U*3 = – 1 |
| 1 | 2  ― | 1  1 | 2  0 | 3  ― | *U*4 = – 1 |
| *Vj* | *V*1 = 3 | *V*2 = 2 | *V*3 = 3 | *V*4 = 2 |  |

*Z*(*X*2) = *Z*(*X*1) = 8.

В таблице 2.27 находим потенциалы.

Оценка ∆33 = – 1 + 3 – 1 = 1 > 0; план *Х*2 не оптимален. Строим цикл пересчета для клетки (3,3).

*Q* = min(1; 1) = 1.

Новый план *X*3 получим в таблице 2.28.

*Таблица 2.28.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bj*  *ai* | 1 | 1 | 1 | 1 | *Ui* |
| 1 | 6  ― | 4  ― | 3  0 | 2  1 | *U*1 = 0 |
| 1 | 3  1 | 2  0 | 5  ― | 4  ― | *U*2 = 0 |
| 1 | 4  ― | 3  ― | 1  1 | 1  ― | *U*3 = – 2 |
| 1 | 2  ― | 1  1 | 2  0 | 3  ― | *U*4 = – 1 |
| *Vj* | *V*1 = 3 | *V*2 = 2 | *V*3 = 3 | *V*4 = 2 |  |



*Z*(*X*3) = 2 + 3 + 1 + 1 = 7.

∆*Z* = *Z*(*X*2) – *Z*(*X*3) = 8 – 7 = 1.

∆*Z* = *Q* · ∆33 = 1 · 1 = 1.

Этот план оптимален, т.к. все оценки ∆*ij* ≤ 0.

**Ответ:** Чтобы затраты на выполнение всех работ были минимальны и равны 7 у. е., первый человек должен выполнять четвертую работу; второй – первую работу; третий – третью и четвертый – вторую.

# Разработка программы для решения транспортной задачи

## Структура программы

В связи с тем, что решение транспортных задач не может быть выполнена вручную, в приемлемые сроки, при количестве поставщиков и потребителей более пяти, возникает необходимость создания и разработки программного продукта для оптимизации решения транспортных задач.

На основе теории и разработанного алгоритма написана прикладная программа на языке С#, позволяющая рационально решать транспортные задачи.

Для построения графического интерфейса использовали библиотеку Windows Forms. Приложение Windows Forms представляет собой событийно-ориентированное приложение, поддерживаемое Microsoft .NET Framework. В отличие от пакетных программ, большая часть времени тратится на ожидание от пользователя каких-либо действий, как, например, ввод текста в текстовое поле или клика мышкой по кнопке.

Для осуществления решения задачи используются различные классы, события и объекты:

NorthWest - метод северо-западного угла

PrintQmin – нахождение и вывод Q минимального в оптимальном плане

UVDOu – нахождение u, v и дельта значений

printZ – нахождение и вывод общей суммы плана

PrintUVDelta – инициализируем u, v и дельта значении

PrintPlan – заполняем таблицу оптимальным планом

NextPlan – нахождение следующего оптимального плана

PrintSavePlan – сохрание оптимального плана

backTable\_Click – выполнение шага назад

nextTable\_Click – выполнение шага вперед

(вставить пункт 3.2, 3.3)

## Руководство пользователя

## (Демонстрация(Описание) интерфейса программы)

## Вывод по главе

Заключение

Выводы по *результатам* работы. Проще всего заключение написать, обобщив выводы по каждой из глав.

Литература

1. Страуструп Б. Язык программирования C++: Пер. с англ. — М.: Бином, 2004. — 1054 с.
2. Гришкун В. В., Григорьев С. Г. Рекомендации по эффективному формированию информационных ресурсов образовательных порталов // Интернет-порталы: содержание и технологии: Сб. научных статей, вып. 3. — М.: Просвещение, 2006. — С. 8—13.
3. Информатика. Базовый курс / Симонович С. В., Евсеев Г. А., Мураховский В. И., Бобровский С. И.; под ред. С. В. Симоновича. — СПб.; Харьков; Минск: Питер, 2000. — 640 с.
4. Таров Д. А. Формирование адекватной самооценки учебной деятельности у подростков (на примере сельской школы): Автореф. дисс. … канд. пед. наук — Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2003. — 20 с.
5. О преподавании учебного предмета «Информатика и ИКТ» и информационных технологий в рамках других предметов в условиях введения федерального компонента государственного стандарта общего образования. // http://www.ed.gov.ru/d/ob-edu/noc/rub/standart/mp/06.doc
6. Могилёв А. В. О понятии «Информационное моделирование» // Информатика и образование. — 1997. — № 8. — С. 3—8.
7. Об электронной цифровой подписи: Федеральный закон РФ от 10.01.2002 г. № 1-ФЗ // Российская газета. — 2002. — 12 янв.
8. Исходные тексты программы

В приложении помещают тексты программ, таблицы с результатами экспериментов и другие объёмные материалы, не вошедшие в основной текст.

Исходные тексты программ должны быть приведены полностью, а также к курсовой работе должен быть приложен компакт-диск с ними, текстом курсовой и другими материалами.

1. Руководство пользователя

Если в курсовой работе разрабатывалась какая-либо программа, к ней обязательно должно быть написано краткое руководство.